

Cuadernos del CIMBAGE N° 10 (2008) 1-16

## VISUALIZACIÓN Y TECNOLOGÍA

Vera W. de Spinadel  
Centro de Matemática y Diseño MAdI  
Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo  
Universidad de Buenos Aires  
Intendente Güiraldes 2160 – Pabellón III – Ciudad Universitaria – Ciudad de  
Buenos Aires – C1428EGA  
[vspinade@fibertel.com.ar](mailto:vspinade@fibertel.com.ar)

Recibido 21 de septiembre de 2007, aceptado 27 de diciembre de 2007

---

### Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar cómo la visualización obtenida por medio de actuales herramientas matemático/informáticas tales como la gráfica computarizada, constituye un elemento indispensable en la aplicación en la investigación de conceptos matemáticos que van desde las estructuras fractales, los nudos y la transición al caos hasta las transformaciones topológicas más generales.

**Palabras clave:** caos, atractor extraño, hiper cubo, hiperestereograma.

---

## VISUALIZATION AND TECHNOLOGY

Vera W. de Spinadel  
Centro de Matemática y Diseño MAdI  
Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo  
Universidad de Buenos Aires  
Intendente Güiraldes 2160 – Pabellón III – Ciudad Universitaria – Ciudad de  
Buenos Aires – C1428EGA  
vspinade@fibertel.com.ar

Received september 21<sup>st</sup> 2007, accepted december 27<sup>th</sup> 2007

---

### Abstract

The main aim of this paper is to show how the visualization obtained through the use of sophisticated mathematical tools like the computerized graphics, is an essential element in the teaching of mathematical concepts that comprise from fractal structures, knots and the transition to chaos up to the more general topological transformations.

**Keywords:** chaos, strange attractor, hypercube, hyper stereogram

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Desde las primeras manifestaciones del hombre, la Matemática ha sido una de las herramientas básicas en la creación y ejecución tecnológica de numerosos objetos, a través de diferentes épocas y estilos.

En diseño arquitectónico, por ejemplo, el diseño de volúmenes ha seguido pautas derivadas de la geometría euclidiana, mientras que los elementos ornamentales de edificios y monumentos fueron generados mediante procesos de repetición, homotecia y simetría.

En numerosas manifestaciones artísticas y constructivas se ha usado el conocido Número de Oro  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$  y sus aproximaciones racionales, cocientes de dos números consecutivos de la sucesión secundaria de Fibonacci

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots \quad (1.1)$$

donde cada término es la suma de los dos que le anteceden, para obtener proporciones más estéticas y armónicas. Asimismo, otros miembros de la Familia de Números Metálicos (Spinadel, 2004) tales como el Número de Plata, el Número de Bronce, el Número de Cobre, el Número de Níquel, etc., gozan de propiedades matemáticas comunes que les confieren una gran importancia en las investigaciones actuales sobre la estabilidad de macro - y micro- sistemas dinámicos no lineales, siendo también usados como base de muchos sistemas de proporciones. Por su parte, la pintura también ha adoptado pautas matemáticas para realzar sus composiciones, comenzando por dar sensación de profundidad mediante la perspectiva, en la que líneas paralelas se cortan en el infinito, el llamado “punto de fuga”. También la escultura ha hecho uso de numerosos conceptos tanto de la geometría euclidiana como de las no euclidianas, superficies no orientadas, nudos y figuras entrelazadas, etc. (véase Zalaya Báez y Barrillo Calonge, 2007).

En la actualidad, los sistemas computacionales disponibles pueden proporcionar realmente nuevas ideas para incrementar la creatividad en todos los ámbitos. De ahí el interés en evidenciar el uso creciente de la visualización en el uso de conceptos matemáticos, especialmente el papel de la gráfica computarizada al intentar explicar fenómenos que van desde las superficies que forman las pompas de jabón, las estructuras fractales, los esquemas filotáticos, la variación de los precios en la Bolsa de Valores, los nudos y la transición al caos hasta

los espacios hiperbólicos (no euclidianos) y las transformaciones topológicas más generales posibles.

## 2. CAOS EN ECONOMÍA

El modelo clásico determinista del crecimiento económico, como es bien sabido, se basa en tres elementos:

- 1) una ecuación que relaciona la tasa neta de nacimientos de la población con el ingreso;
- 2) una función de producción que describe el **“producto laboral inmediato”**;
- 3) una función de distribución que define los salarios laborales.

Este modelo es un sistema dinámico no lineal que puede llegar a exhibir “caos” si depende sensiblemente de los valores iniciales. Obviamente, para afrontar el análisis matemático de un sistema dinámico no lineal, es preciso utilizar métodos aproximados de resolución que, generalmente, son iterativos. Más precisamente, un sistema dinámico, (esto es, que describe la variación de una función en el tiempo) depende de los valores iniciales si dados dos valores iniciales suficientemente próximos, las dos sucesiones de iteradas por ellos generadas se separan notablemente. Para detectar el caos, debemos introducir dos conceptos:

- a. el conjunto de todos los puntos atractores en un sistema dinámico es llamado el **“atractor”** S;
- b. un sistema dinámico se dice transitivo si cuando el valor inicial está próximo a algún punto del atractor S, la sucesión de iteradas se acerca a todo punto de S.

Un sistema dinámico que sea transitivo, muestre dependencia de los valores iniciales y tenga ciclos repelentes que están cerca del atractor S, exhibe caos y el atractor se llama “atractor extraño”. En otras palabras, un sistema dinámico muestra caos si en un sentido hay impredecibilidad (al variar los valores iniciales nada se puede predecir) pero en otro sentido hay predictibilidad (en algún momento la trayectoria va a pasar por el atractor extraño pero no sabemos cuando).

El asombroso rango de comportamientos cualitativos inherentes al modelo clásico y la evolución hacia el caos pueden analizarse cuando se especifica la función de producción. Una función de producción razonable es la dada por la siguiente expresión no lineal

$$f(P) = AP^b(1-P)^d, \quad (2.1)$$

en la cual el término  $AP^b$  representa la función de producción potencial habitual y el término  $(1-P)^d$  es un factor de reducción de la productividad producido por un exceso concentrado de población. Supongamos, por simplicidad, que  $b = d = 1$ . Entonces la función de producción viene dada por la función cuadrática

$$f(P) = AP(1-P) \quad (2.2)$$

que es la llamada “ecuación logística”, descubierta por Pierre F. Verhulst (1804-1849) en su estudio de dinámica de poblaciones (Verhulst, 1845). Esta ecuación cuadrática que describe un sistema dinámico no lineal de crecimiento económico se resuelve en forma iterativa, tomando como unidad temporal una generación de 25 años. Los resultados que se obtienen son los siguientes: para  $A < A_\infty = 3,5699456\dots$ , las iteradas  $f^{(n)}(P)$  con  $0 \leq P \leq 1$  son periódicas con un período de longitud  $2^m$ . Para  $A = A_\infty$  las iteradas son aperiódicas y convergen a un “atractor extraño”, esto es un atractor tal que valores iniciales arbitrariamente próximos se separan macroscópicamente para una iteración suficientemente grande.

En este caso, el atractor extraño resulta ser un conjunto ternario puntual de Cantor (Spinadel, *et al.*, 2007) Figura 1, modificado en el sentido que es una distribución estocástica con una probabilidad de ocurrencia asignada a cada tercio en la iteración. Esta distribución se clasifica como un fractal multi-escalar puesto que el objeto original (una recta de longitud unitaria) se divide en N partes que no son todas idénticas.

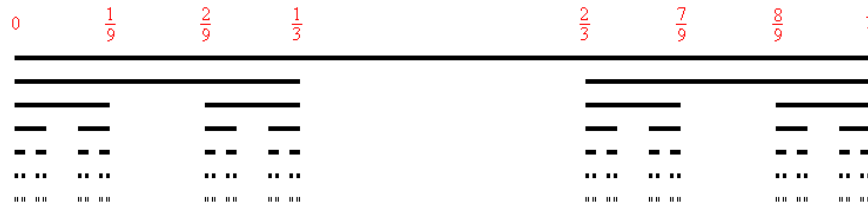


Figura 1. Conjunto de Cantor

Este conjunto se modela asintóticamente mediante un generador con dos intervalos de diferentes longitudes  $A_1 = 0,408$ ;  $A_2 = A_1^2$  y

probabilidades iguales  $p_1 = p_2 = 0,5$ . La dimensión fractal  $D$  (que es una medida cuantitativa de la irregularidad de la estructura fractal) de este modelo de atractor está dada por la ecuación que da la dimensión de fractales multi-escalares (véase Spinadel, 1998), aplicada a este caso de fractal bi-escalar:

$$A_1^D + A_2^D = 1. \quad (2.3)$$

Operando resulta  $A_1^D + (A_1^D)^2 - 1 = 0$  cuya solución positiva es

$$A_1^D = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0,618\dots$$

número que es llamado por los físicos el Número de Oro, debido a que acostumbran a trabajar en el intervalo unitario, reduciendo todos los valores mod 1. Nótese que  $0,618\dots = 1/\phi$ .

Entonces,  $D = \frac{\log 0,618}{\log 0,408} \cong 0,537$  (que representa el punto de máximo valor

de la parábola logística). En la Figura 2 se representa el espectro multifractal de iteradas de la ecuación logística en el punto de acumulación de duplicación de períodos (Halsey *et al.*, 1986)

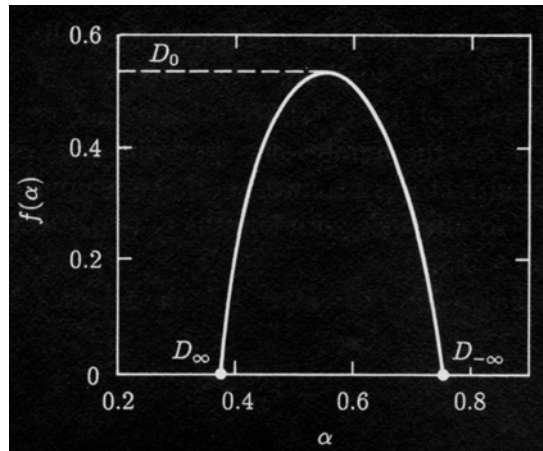


Figura 2. Parábola Logística

Cabe mencionar que la ecuación logística, resuelta en forma iterativa, presenta bifurcaciones de duplicación de período, tal como se puede apreciar en la Figura 3, que son rutas universales de transición al caos.

Esto significa que este comportamiento tan complicado se presenta en numerosos sistemas físicos, ecológicos y económicos, que nada tienen que ver entre sí. El análisis y la investigación de estas rutas universales de transición al caos, que son generalmente de origen fractal, es uno de los temas más importantes en el desarrollo científico actual. Vale aclarar que los fractales y el caos se presentan muchas veces juntos, aunque designan procesos distintos. Se llama “fractal” a un objeto en relación a su geometría, es decir, cuando su borde, su superficie o su estructura interna muestra una constitución que, ampliada y ampliada hasta el infinito, se mantiene invariante. En cambio, caótico es un proceso respecto a su dinámica, esto es, cuando no es posible efectuar ningún tipo de pronóstico sobre su evolución debido a que condiciones iniciales muy semejantes conducen a comportamientos del sistema que difieren enormemente entre sí. Primero, es necesario geometrizar la dinámica del sistema si se desea relacionar ambos conceptos. Sin embargo, mediante gráficas computarizadas se pueden detectar estructuras fractales que son escenarios universales del pasaje al caos.

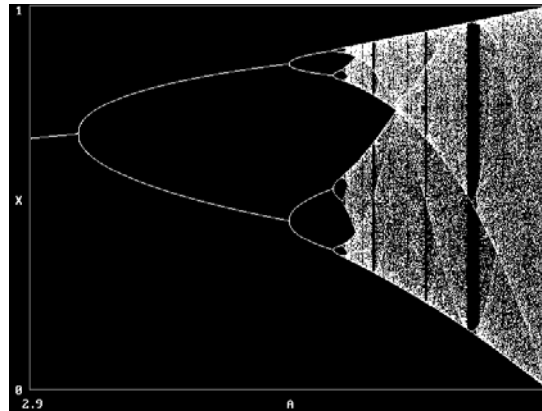


Figura 3. Bifurcaciones de duplicación de período

### 3. DEL ESPACIO BI-DIMENSIONAL A ESPACIOS DE DIMENSIÓN MAYOR. EL HIPERCUBO

Este pasaje a espacios de dimensión mayor reconoce un antecedente notable en el famoso libro: *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, escrito en 1884 por Edwin A. Abbott (1838-1926), un educador de la City of London School, Inglaterra.

El personaje principal y a la vez narrador, “Un Cuadrado”, trae a sus visitas a un dominio totalmente plano habitado por una raza de formas geométricas rígidas. Las reglas en ese lugar son sumamente estrictas: las mujeres de Flatland son líneas rectas; los hombres de clase baja son triángulos isósceles, los profesionales son cuadrados, los nobles son polígonos regulares de 6 o más lados y los sacerdotes, la clase de mayor rango, son círculos.

Un día viene una esfera de visita y para convencer al Cuadrado de que es efectivamente un ente tri-dimensional, prueba con el siguiente argumento matemático (Figura 4): un punto tiene dimensión 0.

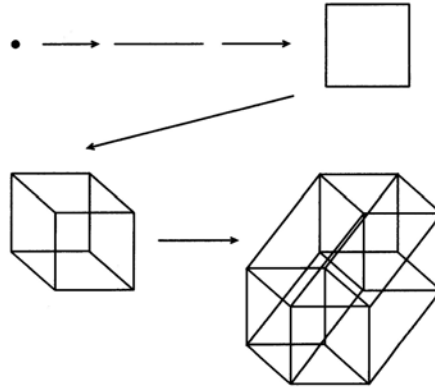


Figura 4. Dimensiones

Al mover un punto a lo largo de una trayectoria rectilínea, obtenemos una recta de dimensión 1. Al desplazar la línea en dirección perpendicular a la propia, tenemos un cuadrado, ente de dimensión 2. Moviendo el cuadrado perpendicularmente a su superficie plana, tenemos un cubo de dimensión 3. Al mover el cubo en una nueva dirección perpendicularmente a las tres ya obtenidas, producimos un misterioso hipercubo, que está limitado por 8 cubos (celdas), tiene 16 vértices, 24 caras y 32 aristas. Si para dibujar una figura de tres dimensiones solamente podemos hacerlo en perspectiva sobre una superficie de dos dimensiones, para dibujar un objeto de cuatro dimensiones sobre una superficie de dos dimensiones, tendremos una perspectiva de una perspectiva. Sin embargo, podemos tener una imagen mental clara del hiper-cubo o cubo de 4 dimensiones así como



de un cubo de 5 dimensiones (Figura 5a, 5b). Ambos están expuestos como modelos en el *Palais de la Découverte* en París, Francia.

Por supuesto que podríamos preguntarnos si no es posible hacer modelos de cubos de mayor número de dimensiones. La respuesta es positiva: un especialista en computación, John Heidemann ha ideado un software llamado *Hyperer*, que permite graficar hipercubos y con el mismo, puede obtener distintas versiones del cubo de 7 dimensiones, una de ellas que se parece a un cubo de 3 dimensiones y la otra que no tiene nada que ver con esta forma.

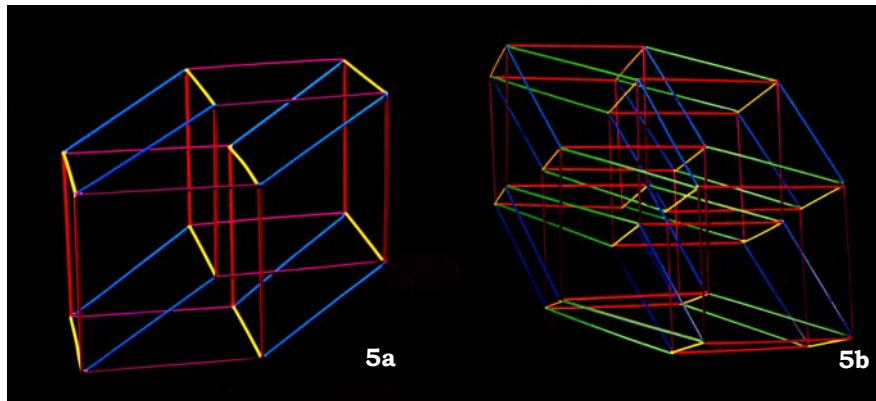


Figura 5a y 5b. Hipercubo

Si viviésemos en un mundo de dos dimensiones, nuestra casa sería una figura plana, como muestra la Figura 6. Al entrar por la puerta A estaríamos a salvo de nuestros amigos y enemigos una vez cerrada la puerta, aun cuando no hubiese techo sobre nuestra cabeza y las paredes y las ventanas fueran simplemente líneas. Encaramarse por encima de estas líneas significaría salirse del plano entrando en una tercera dimensión y, por supuesto que nadie en un mundo de dos dimensiones, estaría en mejores condiciones que nosotros para escapar del interior de una caja fuerte bajo llave y colocada en una cueva, valiéndose de una cuarta dimensión. Un gato de tres dimensiones podría espiar a un rey de dos dimensiones, pero este jamás lo advertiría.

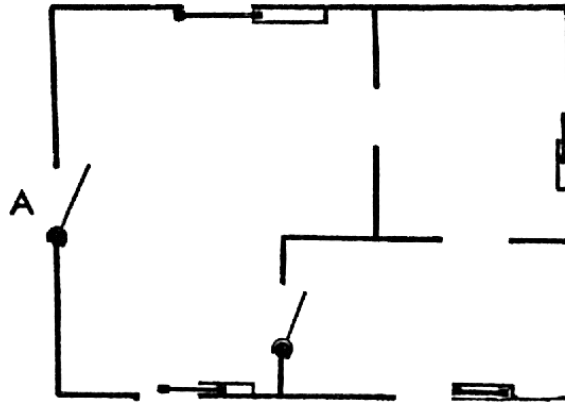


Figura 6. Diagrama de casa bidimensional

Ningún concepto salido de nuestras mentes marcó un mayor paso hacia delante en nuestro pensamiento, ninguna idea de religión, filosofía o ciencia rompió más bruscamente con la tradición y los conocimientos comúnmente aceptados que la idea de una cuarta dimensión.

Sir Arthur Eddington, en su libro: *Space, time and gravitation* (1920), lo ha expresado muy bien:

*“Por muy satisfactoria que pueda ser la teoría de un mundo de cuatro dimensiones, es difícil no prestar atención a una voz que dentro de nosotros nos dice al oído: “En el fondo de tu mente, sabes que una cuarta dimensión es toda una insensatez. Me imagino que esa misma voz ha estado a menudo muy activa en la historia pasada de la Física. ¡Qué disparate decir que esta mesa sólida sobre la que estoy escribiendo es una colección de electrones que se mueven con prodigiosa velocidad en espacios vacíos que, con relación a las dimensiones electrónicas son tan extensos como los espacios entre los planetas del sistema solar! ¡Qué desatino afirmar que el tenue aire está tratando de aplastar mi cuerpo con una carga de 1 kilogramo por centímetro cuadrado! ¡Qué absurdo pretender que el grupo de estrellas que estoy viendo a través del telescopio, evidentemente allí ahora, es un reflejo de una época pasada de hace 50.000 años! No nos dejemos engañar por esta voz. Está desacreditada. Hemos encontrado esta huella extraña en las playas de lo desconocido. Hemos ideado teorías profundas, una después de la otra, para*

*explicar su origen. Al fin hemos logrado reconstruir al ser que dejó esa huella. Y, ¡he aquí! Es la nuestra”.*

Pero el final de esta historia narrada por Abbott es sumamente trágico: el *Cuadrado* es apresado por herejía cuando trata de convencer a sus conciudadanos de la existencia de estos otros dominios.

El ejemplo más notable de aplicación del hipercubo es el famoso cuadro pintado por Salvador Dalí en 1954, llamado *La Crucifixión*, con el subtítulo *Corpus Hypercubicus* (Figura 7). Esta obra es una mezcla de influencias del artista Francisco de Zurbarán y del *Tratado de la figura cúbica*, texto de geometría cabalística escrito en el siglo XVI por Juan de Herrera, el arquitecto que diseñó *El Escorial*. Tomando ventaja del rico simbolismo asociado con la cuarta dimensión, Dalí representa la cruz como un hipercubo desplegado, un inesperado y místico intruso de una dimensión mayor.

Durante muchos años, una copia de esta obra estuvo colgada en la oficina de Thomas F. Banchoff, un matemático de la Brown University en Providence, Rhode Island, USA (Banchoff, 1990). Como geómetra fascinado con la visualización de objetos tetra-dimensionales, Banchoff organizó en octubre de 1984 una exposición, llamada *Hypergraphics 1984*, para celebrar el centenario de la aparición de Flatland. Ejemplos sumamente interesantes de las obras exhibidas son las obras de Harriet Brisson (Brisson, 1999) que pueden admirarse en las Figuras 8 y 9.



Figura 7. *Crucifixión*. Cuadro de Salvador Dalí

La Figura 8 se llama *Great Rhombicuboctahedra and Octagonal Prisms*. Está construida en plexiglas, tubos de aluminio y cuerdas de nylon. Es una estructura que muestra una manera de dividir el espacio en mitades. Como la forma y el espacio “fuera” de la forma son geométicamente idénticos, la escultura sugiere la imposibilidad de diferenciar la forma del espacio intermedio.

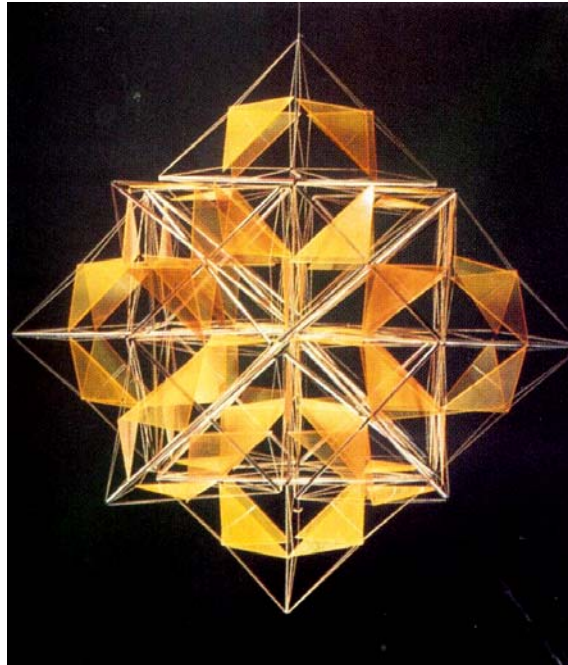


Figura 8. *Great Rhombicuboctahedra and Octagonal Prisms*

La Figura 9 es llamada *Truncated 600-Cell* o bien *octaedro dentro de un gran tetraedro* y muestra doce tubos fluorescentes en forma de octaedro colocado dentro de un tetraedro para producir el análogo tetra-dimensional del icosaedro regular en el espacio tri-dimensional. Por reflexión, la escultura pone en evidencia seiscientas celdas tetraedrales regulares, cinco de las cuales encajan alrededor de cada celda individual. La estructura tenía 9 pulgadas de alto de modo que una persona podía moverse dentro de la escultura y experimentar no solamente la fascinación de las reflexiones en los espejos sino también reconocer su geometría, pasando de visualizaciones simétricas a asimétricas dependiendo desde donde se la observara.

Harriet Brisson fue asimismo la curadora de esta muestra expuesta en la Rhode Island School of Design, exposición que fue dedicada a su marido, David W. Brisson (1930-1982), recientemente fallecido en ese momento. David Brisson estudió matemática a comienzos de la década del '60, interesándose por los conceptos matemáticos de gran número de dimensiones. Más tarde, durante los 18 años que trabajó en la Rhode Island School of Design, se dedicó a hacer que tales conceptos fueran accesibles para el no matemático. Buscó a través de dibujos, modelos y otros dispositivos, la extensión de mecanismos perceptuales que normalmente se usan para comprender el mundo que nos rodea.

El mismo Banchoff presentó en esta oportunidad su obra *Math Horizon* que se muestra en la Figura 10.

*Math Horizon* muestra una esfera que es deformada de modo de cortarse a sí misma en un solo punto del espacio tetra-dimensional (de manera similar a como un ocho representa un círculo deformado con un solo punto de intersección en el plano). Si se observa desde adentro el objeto, se aprecia que las bandas coloreadas corresponden a diferentes círculos de latitudes distintas sobre la esfera bi-dimensional original.

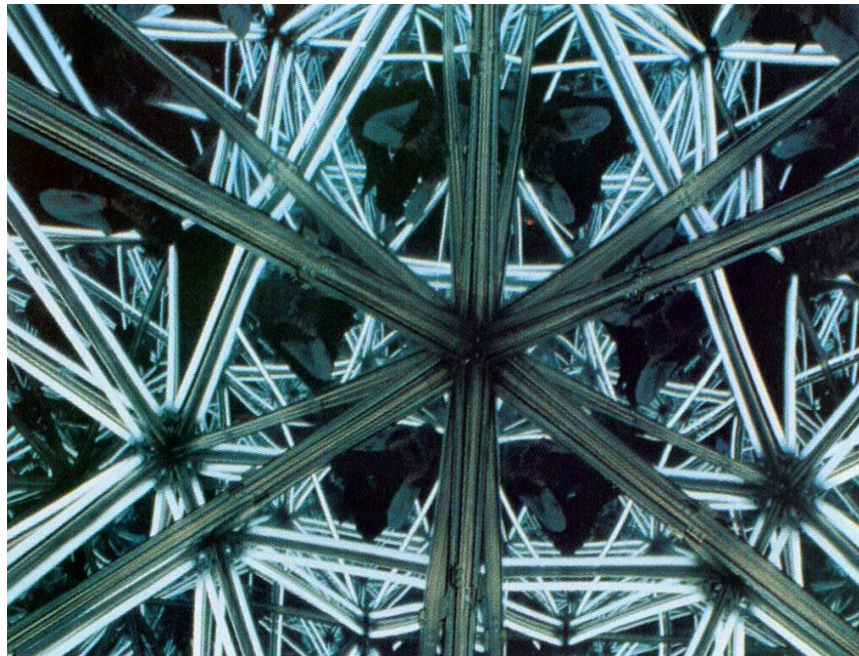


Figura 9. *Truncated 600-Cell*



Figura 10. *Math Horizon*

El término *Hypergraphics* fue introducido por David W. Brisson y su objetivo era experimentar dimensiones múltiples en forma visual. Para ello inventó el “*hiperestereograma*” que permite tener vistas estereoscópicas del hipercubo y otras figuras de mayores dimensiones. Comenzó haciendo proyecciones de una figura tetra-dimensional sobre una superficie, luego rotó el objeto tetra-dimensional en torno de uno de sus planos  $10^\circ$  y reproyectó la figura en otra superficie. El resultado era que un ojo veía solo una de estas imágenes mientras que el otro ojo veía la otra, a causa de que era imposible poner en foco la figura total. En el hipercubo, tan solo una de sus celdas cúbicas estaba en foco a la vez, y para ver toda la forma era preciso cerrar ambos ojos y rotar simultáneamente la cabeza para enfocar secciones del hiperestereograma. Otra invención suya, el *hiperanaglif*, consiste en una proyección en tres dimensiones de una figura tetradimensional, y combina colores y filtros, conjuntamente con una mesa rotatoria para presentar a los espectadores representaciones dinámicas de tales formas. Tal como decía su esposa Harriet, la investigación de su marido comenzó con el hipercubo y los hiperestereogramas e hiperanaglifs. Estos no eran más que ejemplos en su búsqueda continua de mejores métodos para visualizar estos conceptos tan complejos que no se los había podido representar hasta entonces más que mediante fórmulas matemáticas sumamente intrincadas.



**BIBLIOGRAFÍA**

- Abbott, E. A. (1884). *Flatland: A Romance of Many Dimensions by A Square*. Londres, Seeley & Co.
- Banchoff, T. F. (1990). *Beyond the Third Dimension*. New York, Scientific American Library.
- Brisson, H. E. (1999). "Aesthetic geometry". *First Interdisciplinary Conference of the International Society of the Arts, Mathematics & Architecture (ISAMA 99)*, edit. Friedman, N.; Barrallo Calonge, J.. pp. 67-75.
- Coxeter, H. S. M. (1973). *Regular Polytopes*. 3ra. Edición. New York, Dove.
- Fischer, G. (1986). *Mathematische Modelle (Mathematical Models from the collections of Universities and Museums with 132 photographs)*. Braunschweig/Wiesbaden, Friedrich Vieweg & Sohn.
- Halsey, T. C.; Jensen, M. H.; Kadanoff, L. P.; Procaccia, I.; Shraiman, B. I. (1986). "Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets, *Phys. Rev.*, A33, pp. 1141-1151.
- Heidemann, J. (1972).  
[http://www.isi.edu/~johnh/software/screen\\_savers/](http://www.isi.edu/~johnh/software/screen_savers/)
- Kasner, E.; Newman, J. (1972). *Matemáticas e Imaginación*. México, Editorial CECSA.
- Kemp, M. (1998). "Dali's dimensions". *Nature* 391, Enero 1.
- Pickover, C. A. (1999). *Surfing through Hyperspace: Understanding Higher Universes in Six Easy Lessons*, New York, Oxford University Press.
- Verhulst, P. F. (1845). "Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population", *Nouv. Mém. De l'Acad. Roy. Des Sciences et Belles-lettres de Bruxelles* XVIII 8, pp. 1-38.
- W. de Spinadel, V. (1998). *From the Golden Mean to Chaos*. Buenos Aires, Nueva Librería.
- W. de Spinadel, V. (2004). "La familia de números metálicos", *Cuadernos del CIMBAGE* N° 6, pp. 17-45.
- W. de Spinadel, V.; Perera, J. G.; Perera, J. H. (2007). *Geometría Fractal*. Buenos Aires, Nueva Librería.

Zalaya Báez, R.; Barrallo Calonge, J. (2007). *La Escultura Matemática y su clasificación*. Valencia, Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia.